

**Б.Л. Павлов, А.И. Никишина**

**ТЕОРИЯ ВЫРОЖДЕНИЯ ИДЕАЛЬНЫХ  
БОЗЕ-, ФЕРМИ- И БОЛЬЦМАН-ГАЗОВ,  
СОСТОЯЩИХ ИЗ ЧАСТИЦ**

*Монография*

**Воронеж  
Издательство «Научная книга»  
2019**

УДК 536.75  
ББК 22.317  
П 12

**Рецензенты:**

**Селезнёв Б.И.** -! #\$(. ()+-, .!/1\$22/!, 4/67/!!/ 2-89  
7/2+ )!2#6\$(( :9 +(86\$!28##\$ 8;. <!/2>)6) ?+ !/7/, A)6.  
-)1\$ !/9;

**Нечаев В.Н.** /-#/! 18A.-;)#. ()+-, .!/1\$22/!, BD4E BBF «BBH 8;. .!/1. 4.J. L+/-/62-/7/ 8 M.H. N)7)!8()», .!/1\$22/!

**П 12 Павлов, Б.Л.** O\$!/8Q 6: !/R \$(8Q 8 \$)>S(:& T/A\$-, 1\$!; 8- 8  
T/>SU;)(-7)A/6, 2/2#/QV8& 8A W)2#8U: ;/(/7!)18Q / X.Y. Z)6>/6,  
H. \. 48-8 ] 8(). - B!/(\$R: \ A )#\$>S2#6/ «4)+W()Q -(87)», 2019. -  
91 2.

**ISBN 978-5-98222-989-2**

B -(87\$ 8A+W)\$#2Q ./6\$ \$(8\$ 8 \$)>S(:& 7)A/6 !)A>8W(/9 .!8!/ :  
-)- .!8 6:2/-8&, #- 8 .!8 (8A-8& #\$. \$!)#+)!&. ^() Q6>Q\$#2Q  
./ />R\$(8\$; ;/(/7!)188 X.Y. Z)6>/6), B.4. X\$>-/ «O\$!/8Q /#-!:#: &  
282#\$; 8 \$' .!8; \$(8\$ 6 18A8-\$», 6: ]\$ ]\$9 6 2015 7. Z!\$ >/R\$((:\$ 6  
#/9 ;/(/7!)188 6+&-/; ./(\$#(:\$ ;/ \$>8 6:!/R \$((:& T/A\$-, 1\$!; 8-  
7)A/6 8 6 )((/9 ;/(/7!)188 6+&-/; ./(\$#()Q ;/ \$>S 6:!/R \$((/7/  
T/>SU;)(-7)A) ./A6/>Qb# ()9#8 #!/; / 8(); 8W\$2-8\$ &!) -#\$!82#8-8  
- /; ./(\$#/6 c#8& 7)A/6 8 /TeQ2(8#S #)-8\$ Q6>\$(8Q -) - / ( \$(2)U88 X/A\$-  
f9( ]#\$9(), h\$!; 8-i 8!)-) 8 X/>SU;)().

j (87) T+ \$# 8(#\$!2() 8 ./>\$A() )2.8!)(#);, .!\$. / )6)#\$>Q; 6+A/6  
8 2#+ \$(#); 2#)! ] 8& -+!2/6.  
X8T>.: 37 ()A6.

УДК 536.75  
ББК 22.317  
П 12

**ISBN 978-5-98222-989-2**

© Павлов Б.Л., Никишина А.И., 2019

## ВВЕДЕНИЕ

Теория открытых равновесных систем (систем с переменным числом частиц) впервые была разработана в монографии [1], краткое содержание которой изложено в [2]. В этих работах изложена статистическая термодинамика открытых равновесных систем, которая коренным образом отличается от статистической термодинамики закрытых систем (систем с постоянным числом частиц), которую для краткости в дальнейшем будем называть обычной статистической термодинамикой. В обычной статистической термодинамике устанавливается уравнение состояния данной системы  $P = P(V, T)$ , где  $P$  – давление,  $V$  – объём,  $T$  – абсолютная температура. Величины  $V$  и  $T$  называются термодинамическими параметрами системы. Далее необходимо знание основного уравнения обычной термодинамики [3], [4]:  $TdS = dU + PdV$ . Такие величины как давление  $P$ , внутренняя энергия  $U$ , энтропия  $S$ , свободная энергия  $F$ , химический потенциал частицы  $\mu$ , термодинамический потенциал Гиббса  $G = \mu N_0 = U + PV - TS$ , теплоёмкость при постоянном объёме  $C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$ , теплоёмкость при постоянном давлении  $C_P = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P$  назовём термодинамическими характеристиками закрытой системы. Все перечисленные выше термодинамические характеристики системы с постоянным числом частиц, являются функциями двух параметров  $V$  и  $T$ . Из уравнения состояния и основного уравнения термодинамики можно получить уравнения всех процессов, которые можно осуществить в системе с постоянным числом частиц. В частности, изотермического, изобарического и адиабатического. Выскажем утверждение, что химический потенциал частиц, из которых состоят все закрытые реальные системы с постоянным числом частиц, всегда является отрицательной величиной и при  $T \rightarrow \infty$  стремится к  $-\infty$ . Будем теперь в закрытой системе осуществлять изохорический процесс: понижать в ней абсолютную температуру, сохраняя постоянным её объём. Тогда химический потенциал её частиц  $\mu = \mu(V, T)$ , оставаясь отрицательным, уменьшается по абсолютной величине и при некоторой температуре  $T_0$  обращается в нуль:  $\mu(V, T_0) = 0$ . Эту температуру назовём температурой вырождения открытой термодинамической системы. Химический потенциал, обратившись в нуль при температуре  $T_0$ , так и остаётся равным нулю при любой температуре из интервала температур ( $0 < T \ll T_0$ ).

Термодинамическую систему, состоящую из частиц, химический потенциал которых  $\mu = 0$ , назовём открытой системой или системой с переменным числом частиц. Уравнение состояния открытой равновесной системы было впервые выведено в 1993 году в работе [5] и этот вывод доложен в этом же году на XXXIV внутривузовской конференции в Воронежском технологическом институте [6]. В неявном виде оно записывается так:  $\frac{dP(T)}{dT} = S'(T)$ , где  $S'(T) = \frac{S}{V}$  – плотность энтропии. Это уравнение справедливо для любой однокомпонентной открытой равновесной системы, независимо от её вида. В работе [5] показано, что термодинамическим параметром открытой однокомпонентной равновесной системы является только одна абсолютная температура. Термодинамические характеристики этой системы представляют собой плотности внутренней энергии  $U'(T)$ , свободной энергии  $F'(T) = -P(T)$ , энтропии  $S'(T)$ , которые являются функциями абсолютной температуры. Плотность теплоёмкости этой системы определяется как  $C'(T) = \frac{dU'(T)}{dT}$ . Получено также и основное уравнение термодинамики для однокомпонентной равновесной открытой системы:  $TdS'(T) = dU'(T)$ . Открытую равновесную систему можно ещё назвать вырожденной системой. Тогда переход закрытой равновесной системы в открытую можно рассматривать как переход невырожденной системы в вырожденную [8], а саму температуру этого перехода как температуру её вырождения. Вполне очевидно, что теория вырождения идеальных газов не может быть создана без теории открытых равновесных систем. Правильная теория вырождения идеальных бозе- и ферми-газов, состоящих из частиц, была впервые изложена в работе [1]. Теория вырождения идеального больцман-газа, состоящего из частиц, была развита значительно позже в работе [9]. Причиной такого позднего написания этой работы явилось неправильное утверждение в работе [4], что идеальный квантовый больцман-газ не может быть вырожденным. Потребовалась написание работ [10], [11], в которых было доказано, что идеальный квантовый больцман-газ также может быть вырожденным. Представляет интерес объединить работы [9], [10], [11] вместе. Как известно авторам, в литературе отсутствует теория открытых равновесных систем, а, следовательно, не может быть никакой строгой теории вырождения идеальных газов различной природы. В данной работе развита теория вырождения идеальных газов, состоящих из частиц, которые

подчиняются квантовым статистикам Больцмана, Бозе и Ферми. Согласно работе [13] разделим пространство ( $0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z < \infty$ ), заполненное исследуемым газом, на кубы с длиной ребра  $L$ , где  $L$  – среднее расстояние между частицами в идеальном газе. Для частицы, движущейся в этом кубе, потребуем выполнение следующих периодических граничных условий:  $\Psi(0, y, z, t) = \Psi(L, y, z, t)$ ,  $\Psi(x, 0, z, t) = \Psi(x, L, z, t)$ ,  $\Psi(x, y, 0, t) = \Psi(x, y, L, t)$  [13]. Тогда число квантовых состояний этой частицы, движущейся с модулем импульса  $p$  в кубе периодичности  $V = L^3$ , как показано в работе [12], равно:  $gm^3 = gVh^{-3}$ , где  $g = 2s + 1$  – кратность вырождения по спину. Последнее соотношение устанавливает связь между трёхмерным квантовым и шестимерным квазиклассическим фазовыми пространствами частицы. Дифференцируя это выражение, получим элементарное число квантовых состояний этой частицы  $3gm^2 dm$ . Тогда элементарное среднее число частиц  $d\bar{n}(m)$ , имеющих энергию  $\varepsilon(m)$ , (для статистик Ферми (знак +) и Бозе (знак –)) можно записать так согласно [1]

$$d\bar{n}(m) = 3g\{\exp[(\varepsilon(m) - \mu)(k_0T)^{-1}] \pm 1\}^{-1}m^2 dm, \quad (1)$$

а для статистики Больцмана согласно [9]

$$d\bar{n}(m) = 3g\exp[(\mu - \varepsilon(m))(k_0T)^{-1}]m^2 dm. \quad (2)$$

Здесь

$$\varepsilon(m) = \frac{p(m)^2}{2m_0} = \frac{m^2 h^2}{2m_0 V^{2/3}}, \quad (3)$$

а  $\mu(V, T)$  – химический потенциал частицы [9].

Книга представляет собой подробное описание истории развития теории вырождения идеальных газов различной природы. Следует заметить, что после публикации монографии [1] появилось уже достаточное число работ, так или иначе связанных с применением статистической термодинамики открытых систем в других разделах физики и химии, поэтому работа [1] будет неполной, если не указать на них. Краткое содержание этих работ изложено в главе 9. В книге высказано много критических замечаний, которые связаны с незнанием

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ ВЫРОЖДЕННОГО ИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА .....	6
1.1. Термодинамические характеристики идеального бозе-газа как закрытой системы (невыврожденный идеальный бозе-газ) .....	6
1.2. Определение температуры вырождения идеального бозе-газа .....	10
1.3. Модель однокомпонентного вырожденного идеального бозе-газа....	11
1.4. Физический смысл температуры вырождения в однокомпонентной модели вырожденного идеального бозе-газа.....	13
1.5. Недостатки однокомпонентной модели вырожденного идеального бозе-газа.....	13
1.6. Критические замечания относительно теории вырождения идеального бозе-газа, предложенной Ландау.....	14
1.7. О некорректном определении «конденсации Бозе-Эйнштейна».....	16
2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ ВЫРОЖДЕННОГО ИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА.....	16
2.1. Попытка введения второго компонента вырожденного идеального бозе-газа.....	16
2.2. Квазиклассическое и квазиквантовое приближения.....	19
2.3. Понятие о двухкомпонентной модели вырожденного идеального бозе-газа .....	20
2.4. Явление «конденсации Бозе-Эйнштейна».....	21
2.5. Квазиквантовое приближение.....	21
2.6. Физический смысл температуры вырождения идеального бозе-газа в случае квазиквантового приближения.....	21
2.7. «Конденсат» - закрытая система.....	21
2.8. Уравнение состояния «конденсата».....	22
2.9. Химический потенциал частиц «конденсата».....	23
2.10. Энтропия «конденсата».....	23
2.11. Теплоёмкости «конденсата».....	24
2.12. Полностью вырожденный идеальный бозе-газ.....	24
2.13. Вычисление температур вырождений для некоторых идеальных бозе-газов.....	25
3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ ВЫРОЖДЕННОГО ИДЕАЛЬНОГО	

ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА .....	26
3.1. Термодинамические характеристики идеального ферми-газа.....	26
3.2. Определение температуры вырождения идеального электронного газа	27
3.3. Вычисление температуры вырождения идеального электронного газа	28
3.4. Термодинамические характеристики идеального электронного газа как закрытой системы (невырожденный идеальный электронный газ)...	28
3.5. Термодинамические характеристики для однокомпонентной модели вырожденного идеального электронного газа.....	33
3.6. Недостатки однокомпонентной модели вырожденного идеального электронного газа.....	35
3.7. Физический смысл температуры вырождения для однокомпонентной модели вырожденного идеального электронного газа.....	36
4. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ ВЫРОЖДЕННОГО ИДЕАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА.....	36
4.1. Понятие о двухкомпонентной модели вырожденного идеального электронного газа.....	36
4.2. Физический смысл температуры вырождения для двухкомпонентной модели вырожденного идеального электронного газа	38
4.3. Понятия граничного квантового числа, граничной энергии и граничного импульса для «конденсата».....	38
4.4. Термодинамические характеристики «конденсата».....	39
4.5. Полностью вырожденный идеальный электронный газ.....	41
4.6. Критические замечания по теории вырождения идеального электронного газа, развитой Ландау.....	42
5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА ДВУХКОМПОНЕНТНОГО ВЫРОЖДЕННОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ИЗ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛАХ.....	42
5.1. Определение температуры вырождения идеального газа из свободных электронов в металлах.....	42
5.2. Термодинамические характеристики вырожденного идеального газа из свободных электронов в металлах. ....	44
6. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА КВАНТОВОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ГИБСА. ВЫВОДЫ КВАНТОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БОЛЬЦМАНА.....	47
6.1. Элементы квантовой механики.....	47
6.2. Спины ядер, атомов, молекул.....	50

6.3. Понятие фазового пространства для квантового идеального газа.....	52
6.4. Каноническое распределение Гиббса для квантового идеального газа..	52
6.5. Уравнение состояния классического идеального газа.....	52
6.6. Основной закон термодинамики.....	53
6.7. Запись основного закона термодинамики в дифференциальной форм.....	53
6.8. Основное уравнение термодинамики для классического идеального газа.....	54
6.9. Определение термодинамических характеристик невырожденного квантового идеального газа Гиббса.....	54
6.10. Критические замечания по классической статистической термодинамике идеального газа.....	56
6.11. Критические замечания по квантовой статистической термодинамике идеального газа.....	56
6.12. Определение температуры вырождения идеального газа Гиббса...	57
6.13. Вывод дискретного распределения Больцмана.....	58
6.14. Неправильный вывод распределения Больцмана.....	58
6.15. Вывод распределения самим Больцманом.....	59
6.16. Невозможность перехода при высоких температурах статистик Бозе и Ферми в статистику Больцмана.....	62
<b>7. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ ВЫРОЖДЕННОГО КВАНТОВОГО ИДЕАЛЬНОГО БОЛЬЦМАН-ГАЗА .....</b>	
7.1. Уравнения для нахождения термодинамических характеристик больцман-газа. ....	64
7.2. Термодинамические характеристики невырожденного идеального больцман-газа .....	65
7.3. Нахождение температуры вырождения идеального больцман-газа...	66
7.4. Термодинамические характеристики вырожденного идеального больцман-газа .....	67
7.5. Недостатки однокомпонентной модели вырожденного идеального больцман-газа .....	68
<b>8. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ ВЫРОЖДЕННОГО КВАНТОВОГО ИДЕАЛЬНОГО БОЛЬЦМАН-ГАЗА.....</b>	
8.1. Понятие о двухкомпонентной модели вырожденного идеального больцман-газа .....	69

8.2. Квазиклассическое и квазиквантовое приближения.....	70
8.3. Замечание о термодинамическом равновесии компонентов вырожденного идеального бoльцман-газа .....	72
8.4. Термодинамические характеристики «конденсата» вырожденного идеального бoльцман-газа.....	72
8.5. Термодинамические характеристики полностью вырожденного идеального бoльцман-газа .....	74
8.6. Термодинамические характеристики двухкомпонентной модели вырожденного идеального газа Гиббса .....	75
9. РАБОТЫ, НЕ ВОШЕДШИЕ В МОНОГРАФИЮ [1].....	76
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	78
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	83

---

*Научное издание*

**ПАВЛОВ Борис Леонидович  
НИКИШИНА Анна Игоревна**

**ТЕОРИЯ ВЫРОЖДЕНИЯ ИДЕАЛЬНЫХ БОЗЕ-, ФЕРМИ-  
И БОЛЬЦМАН-ГАЗОВ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ЧАСТИЦ**

Монография

Издание публикуется в авторской редакции  
Компьютерная верстка Павлова Б.Л.

Дизайн обложки С.А. Кравец

---

Подписано в печать 18.05.2019. Формат 60x84 1/16  
Усл. печ. л. 5,6. Заказ 000. Тираж 500 экз.

---

ООО Издательство «Научная книга»  
394077, Россия, г. Воронеж, ул. 60-й Армии, 25-120  
<http://www.sbook.ru/>

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в ООО «Цифровая полиграфия»  
394036, Россия, г. Воронеж, ул. Ф. Энгельса, 52  
Тел. (473) 261-03-61