

**А.В. Дмитриев**

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ  
ДИНАМИКА ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Монография**

**Воронеж  
Издательство «Научная книга»  
2015**

**УДК 517.938.5, 519.246.87**

**ББК 32.96**

**Д 53**

**Рецензенты:**

**Твердислов В.А.** доктор физ.-мат. наук, профессор (Физический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова)

**Фролова Е.В.** кандидат физ.-мат. наук, доцент (Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ)

**Д 53 Дмитриев, А.В.** Нелинейная дифференциальная динамика экономических систем: Монография / А.В. Дмитриев. – Воронеж: Издательство «Научная книга», 2015. – 156 с.

**ISBN 978-5-98222-884-0**

Настоящая монография посвящена качественному анализу нелинейной дифференциальной динамики одномерных, двумерных и трехмерных экономических систем. Представлены результаты качественного анализа динамических моделей экономического равновесия и экономического роста, популяционных моделей экономики и неравновесной динамической модели фондового рынка. Предложены параметрические условия устойчивости экономических систем, которые могут быть полезны в управлении экономическими системами.

Книга адресована широкому кругу специалистов, работающих в области эволюционной экономики, экономофизики, экономической динамики, математического моделирования, а также всем интересующимся вопросами теоретической экономики.

**УДК 517.938.5, 519.246.87**

**ББК 32.96**

**Д 53**

**ISBN 978-5-98222-884-0**

**© Дмитриев А.В., 2015**

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение.....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Одномерные динамические системы.....</b>	<b>7</b>
1.1. Модели экономического равновесия.....	7
1.2. Модели экзогенного экономического роста.....	11
1.3. Популяционные модели в экономике.....	17
Приложение 1. Качественный анализ одномерных динамических систем.....	29
Приложение 2. Бифуркационный анализ одномерных динамических систем.....	34
<b>Глава 2. Двумерные динамические системы.....</b>	<b>40</b>
2.1. Модели выпуска продукта взаимозависимыми отраслями производства.....	40
2.2. Модель Вольтерра и ее обобщение.....	54
2.3. Модели конкуренции фирм.....	62
2.4. Модели социальных сетей.....	65
2.5. Модели экономического роста.....	73
Приложение 1. Анализ устойчивости двумерных динамических систем.....	74
Приложение 2. Бифуркации в двумерных системах.....	93
<b>Глава 3. Трехмерные динамические системы.....</b>	<b>96</b>
3.1. Предельный цикл в модели выпуска продукта взаимосвязанными отраслями производства.....	98
3.2. Экономические системы термодинамического типа.....	101
3.3. Низкоразмерный хаос в неравновесной динамической модели фондового рынка.....	111
3.4. Анализ финансовых временных рядов с учетом факторов нелинейности их базовой динамики.....	122
Приложение 1. Низкоразмерный хаос в динамических системах.....	138
<b>Заключение.....</b>	<b>147</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>148</b>

## Введение

Сегодня экономическая наука достигла такого уровня развития, когда в ней стали эффективно применяться новые нестандартные методы физико-математического моделирования экономических процессов. Наличие сложностей в экономических системах с неизбежностью приводит к появлению соответствующей эволюционной динамики. В настоящее время предпринимаются разнообразные попытки включить экономическую динамику в рамки того теоретизирования, которое в задачах аналогичного типа весьма успешно работает в естествознании. Такие попытки предпринимались неоднократно. Однако, в силу специфики предмета исследования, между различными группами ученых, занимающихся построением экономических моделей, имеется различное понимание того, как применять конструкции прикладной математики для моделирования экономической реальности. Оказалось, что прямое приложение готовых математических конструктов к экономической динамике малоэффективно.

Практика построения базисных математических конструкций, эффективно моделирующих динамику в различных физических системах и процессах, указывает на то, что соответствующая математическая модель в той или иной мере становится адекватной изучаемому оригиналу, если все ее характеристические особенности выводятся из свойств и структуры того вида движения, которое формирует динамику системы. Сегодня экономическая наука достигла такого уровня развития, когда в ней стали эффективно применяться новые нестандартные методы физико-математического моделирования экономических процессов. Наличие сложностей в экономических системах с неизбежностью приводит к появлению соответствующей эволюционной динамики. В настоящее время предпринимаются разнообразные попытки включить экономическую динамику в рамки того теоретизирования, которое в задачах аналогичного типа весьма успешно работает в естествознании. Такие попытки предпринимались неоднократно. Однако, в силу специфики предмета исследования, между различными группами ученых, занимающихся построением экономических моделей, имеется различное понимание того, как применять конструкции прикладной математики для моделирования экономической реальности. Оказалось, что прямое приложение готовых математических конструктов к экономической динамике малоэффективно.

Монография «Нелинейная дифференциальная динамика экономических систем» включает три главы, посвященные качественному анализу одномерных, двумерных и трехмерных нелинейных динамических систем. Рассмотренные динамические системы моделируются системами нелинейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Соответственно, базовый математический аппарат, используемый для

анализа динамических систем, – качественная теория дифференциальных уравнений. Решаются задачи определения стационарных точек динамических систем и их устойчивости, поиска различных аттракторов (положения равновесия, устойчивые предельные циклы, хаотические аттракторы) и бифуркационного анализа динамических систем.

В большинстве случаев результаты качественного анализа динамических систем являются более значимыми, чем результаты их количественного анализа. Уместно процитировать В.П. Милованова: «Обычно с применением математики к анализу реальных объектов связывают получение численного результата. В этом отношении задача качественных методов несколько иная: она делает акцент на получении качественного результата, на получении характерных черт всего явления сразу, на прогнозировании явления. Конечно, интересно знать, на сколько увеличится платежеспособный спрос при снижении цен на некоторый товар, но гораздо интереснее знать, наступит ли при этом дефицит данного товара» (Милованов, 2015).

Первая глава (одномерные системы) монографии посвящена качественному исследованию макроэкономических моделей экономического роста и экономического равновесия.

Во второй главе (двумерные системы) представлены результаты качественного анализа систем, так называемого, эколого-популяционного типа. В основу построения таких систем положен принцип изоморфизма (в широком смысле) динамики экологических популяций и динамики продукции предприятий и отраслей производства различного типа.

В данной монографии основное внимание будет сосредоточено на проблеме построения математических моделей экономических процессов, агрегированных многофакторной синергией сложных динамических экономических систем. Эту область экономической науки естественно назвать *теоретической экономикой*. Теоретическая экономика соотносится с «экономикой экспериментальной» примерно также как физика экспериментальная соотносится с физикой теоретической. Такое аналоговое сопоставление физики и экономики будет далее широко использоваться в главе 3. Оно порождается универсальной междисциплинарностью синергетического взгляда на мир.

Теоретическая экономика (иногда ее называют «синергетическая экономика») появилась в современной науке уже сравнительно давно (Занг, 2002). Исторически получилось так, что ее стали называть «экономифизика». Однако далее мы будем использовать все-таки термин «теоретическая экономика», как более соответствующий ее содержанию.

Под теоретической экономикой понимается базовая основа теоретических идеи, положений и методов, которые позволяют построить *математическую модель экономической динамики*, адекватно отражающую

динамическое развитие сложных экономических систем, в основе которых лежит особая – *экономическая форма движения*.

Синергетическая парадигма полагает, что теоретическое исследование реализации экономической формы движения следует вести в рамках физико-математического инструментария, который доставляет современная теория сложных динамических систем. Онтологическим ядром современной теоретической экономики является структура экономического взаимодействия, которое порождает особый тип движения, формирующий экономическую динамику. Поэтому данную главу можно рассматривать как своеобразные пролегомены к пока еще не завершенной теоретической дисциплине – *экономической динамике*.

Для раскрытия онтологического смысла этого нового понятия экономической науки приведем ассоциативный ряд различного типа существующих «динамик»: механическая динамика, гидродинамика, термодинамика, электродинамика, нейродинамика и т.д. В основе функционирования каждой из них лежит некоторый специфический вид «движения», обусловленный типом взаимодействий между элементами («атомами») соответствующих динамических систем. С точки зрения системно-структурного подхода между динамиками различных типов существует концептуальная общность, которую и выявляет синергетическая парадигма.

---

Научное издание

**Дмитриев Андрей Викторович**

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ДИНАМИКА  
ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Монография

Издание публикуется в авторской редакции

Дизайн обложки С.А. Кравец

---

Подписано в печать 16.11.2015. Формат 60x84 1/16

Усл. печ. л. 9,8. Заказ 000. Тираж 500 экз.

---

ООО Издательство «Научная книга»  
394077, Россия, г. Воронеж, ул. 60-й Армии, 25-120  
<http://www.sbook.ru/>

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в ООО «Цифровая полиграфия»  
394036, Россия, г. Воронеж, ул. Ф. Энгельса, 52  
Тел. (473) 261-03-61