

**В.В. Провоторов, А.С. Волкова**

**НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ  
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ  
НА ГРАФЕ**

**Монография**

**Воронеж  
Издательство «Научная книга»  
2014**

**УДК 517.983.51/517.977.56**

**ББК 22.193**

**П 78**

**Рецензенты:**

**Жабко А.П.**, д-р физ.-мат.наук, профессор (Санкт-Петербургский государственный университет);

**Блатов И.А.**, д-р физ.-мат.наук, профессор (Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара)

**П 78 Провоторов, В.В.** Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе: Монография/ В.В.Провоторов, А.С. Волкова. – Воронеж: Издательство «Научная книга», 2014. – 188 с.

**ISBN 978-5-98222-841-3**

Изложены вопросы существования и единственности решений класса  $L_2$  (обобщенные решения) различных типов краевых и начально-краевых задач для уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов с распределенными параметрами на геометрическом графе. Коэффициенты уравнений зависят только от пространственной переменной, изменяющейся на графе, дифференциальные уравнения имеют представления, часто встречающиеся в математических моделях, описывающих тепловые и волновые процессы сетеподобных промышленных конструкций, а также метаболические процессы в биологических системах и процессы, проходящие в ритейлерских сетях коммерческих структур. Представлены результаты исследований по управлению дифференциальными системами управляющими воздействиями, распределенными на графе.

Для математиков, механиков, физиков, инженеров, изучающих сетеподобные системы, а также студентов и аспирантов математических и физико-технических специальностей.

Библ. 104 назв.

**УДК 517.927.25/956.37**

**ББК 22.193**

**П 78**

**ISBN 978-5-98222-841-3**

**О Провоторов В.В., Волкова А.С., 2014**

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	6
<b>Введение</b> .....	9
1. Основные понятия .....	9
2. Математические модели физического происхождения .....	11
<b>I. Краевые задачи на графе в классе гладких функций</b> .....	33
§ 1. Собственные функции краевой задачи на простейшем графе .....	33
§ 2. Собственные функции краевой задачи на графе-звезде .....	48
§ 3. Собственные функции краевой задачи на графе с циклом .....	69
§ 4. О собственных функциях краевых задач на произвольном графе .....	71
4.1. Собственные функции краевой задачи на графе-цепочке из двух звезд .....	72
4.2. Собственные функции краевой задачи на графе-цепочке из конечного числа звезд .....	80
<b>II. Краевые задачи в классе <math>L_2(\Gamma)</math></b> .....	87
§ 1. Основные определения и утверждения .....	88
1.1. Предварительные предложения .....	88
1.2. Обобщенные решения из класса $W_2^1(\Gamma)$ и $W_2^2(\Gamma)$ .....	95
§ 2. Фредгольмова разрешимость краевых задач .....	98
2.1. Вспомогательные утверждения .....	98
2.2. Энергетическое неравенство. Теорема единственности .....	103
2.3. Фредгольмова разрешимость краевой задачи (2.1.6), (2.1.9) .....	105
2.4. Фредгольмова разрешимость краевой задачи (2.1.6), (2.1.10) .....	109
§ 3. Разложение по обобщенным собственным функциям краевых задач .....	110

<b>III. Начально-краевые задачи в классе <math>L_2(\Gamma_T)</math></b> .....	113
§ 1. Основные понятия .....	114
§ 2. Однозначная разрешимость начально-краевой задачи для уравнения параболического типа .....	120
§ 3. Однозначная разрешимость начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа .....	132
§ 4. О начально-краевых задачах с краевыми условиями 2-го и 3-го рода .....	140
<b>IV. Управление системами с распределенными параметрами на графе</b> .....	142
<b>IV–1. Управление в классе гладких функций</b> .....	143
§ 1. Вспомогательные предложения, постановка задачи .....	143
§ 2. Решение задачи управления .....	147
2.1. Задача гашения колебаний .....	147
2.2. Перевод покоящейся системы в заданное состояние ....	154
2.3. Решение задачи управления .....	155
<b>IV–2. Управление в классе <math>L_2</math></b> .....	157
§ 1. Вспомогательные предложения .....	157
1.1. Связь пространств $W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$ , $L_2(\Gamma_T)$ и $L_{2,1}(\Gamma_T)$ .....	157
1.2. Общие утверждения .....	158
1.2.1. Коэрцитивные формы .....	158
1.2.2. Некоэрцитивные формы .....	159
§ 2. Эллиптические задачи .....	160
2.1. Предварительные замечания .....	160
2.2. Задача оптимального управления эллиптическими системами в пространстве $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$ .....	161
2.2.1. Задача оптимального управления. ....	161
2.2.2. Соотношения, определяющие оптимальное управление .....	162
§ 3. Эволюционные задачи .....	166
3.1. Задача оптимального управления параболической системой в пространстве $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ .....	166
3.1.1. Задача оптимального управления. ....	166
3.1.2. Соотношения, определяющие оптимальное	

управление .....	169
3.2. Задача оптимального управления параболической системой в пространстве $W_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ .....	172
3.3. Задача оптимального управления гиперболической системой в пространстве $W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$ .....	174
3.3.1. Задача оптимального управления. ....	174
3.3.2. Соотношения, определяющие оптимальное управление. ....	176
<b>Список литературы</b> .....	<b>181</b>

## Предисловие

Многие современные промышленные устройства и конструкции представляют собой сетеподобный объект, который можно ассоциировать с геометрическим графом. Линейный элемент этого объекта — ребро графа, взаимодействия линейных элементов осуществляется в узлах (вершинах) графа [8, 19, 21, 25, 37, 50, 58, 64, 65, 67, 70, 75, 92]. Такой принцип построения технических объектов заложен, например, в антенных конструкциях различных типов — сетчатые и решетчатые антенны, антенны типа «мачта-растяжки». Протекающие в этих устройствах процессы допускают математическое описание в виде соответствующих математических моделей, реализуемых на геометрическом графе. На ребрах графа устанавливаются соотношения, описывающие закономерности функционирования системы, во внутренних узлах — условия взаимодействия смежных континуумов, в граничных узлах — краевые (граничные) условия, характерные для конкретной системы (конкретного устройства) [19, 49, 51–53, 71, 72, 74–77, 93]. Как представляется авторам, начально-краевые задачи для уравнений с распределенными параметрами на графе являются перспективным инструментом исследования сетевых экономических процессов [79] и процессов обмена веществ в биологическом организме (метаболизм клеток) [55, 78]. Таким образом, математические модели разных прототипов изначально имеют общее свойство быть краевыми или начально-краевыми задачами для уравнений, являющимися уравнениями с распределенными параметрами на графе. В настоящей книге представлены основные методы и результаты, полученные при исследовании систем с распределенными параметрами на геометрическом графе, а также указаны приложения их, связанные прежде всего с управлением системами, описывающими теплофизические процессы [10, 11] и упругие колебания [19, 21, 67, 70, 75, 76] в сетеподобных конструкциях.

Раздел I содержит подробный анализ серии спектральных задач на графах в классах гладких функций, часто используемых в приложениях: спектральные задачи на простейшем графе, звезде, графе с циклом. Здесь же указаны пути анализа спектральных задач на произвольном графе. Разделы II и III содержат последние сведения теории краевых и начально-краевых задач для дифференциальных систем с распределенными параметрами на графе: получены условия однозначной разрешимости таких задач в разных классах обобщенных решений. Результаты указанных разделов являются основополагающими для исследований,

представленных в разделе IV, которая посвящена некоторым вопросам математической теории оптимального управления системами, описываемыми уравнениями с частными производными с распределенными параметрами на графе: рассматриваются системы, для которых состояние определяется как решение (слабое решение) для уравнений с частными производными 2-го порядка с присоединенными граничными условиями, а в случае эволюционных уравнений — и начальными условиями. В части IV-1 раздела IV в классе  $C^2$  представлен метод нахождения граничных управляющих воздействий в задаче управления колебаниями упругой системы струн, закрепленных по типу графа-звезды, состоящей в переводе процесса колебаний системы из заданного начального состояния в заданное финальное состояние. Задачи оптимального управления для систем с распределенными параметрами на произвольном графе рассмотрены в классе  $L_2$  (часть IV-2 раздела IV). Предшествует этому изучение обобщенных решений краевых, начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений 2-го порядка на произвольном геометрическом графе (разделы II–III). Такие решения определяются с помощью интегральных тождеств, заменяющих собой уравнения, начальные и граничные условия. При этом указываются пространства, в которых предполагается отыскание обобщенных решений и приводятся условия однозначной разрешимости таких задач. Полученные результаты являются основополагающими не только при исследовании задач управления колебаниями сетеподобных промышленных конструкций [67, 70, 75, 76], но и при анализе процесса метаболизма клеток биологических структур [55] — обмен веществ, химические превращения в клетках и между клетками живого организма, осуществляемые по метаболическим цепочкам, где происходят разного рода реакции, необходимые для поддержания биологической жизни организма. Упомянем также интенсивно развивающееся в последние 10 лет математическое моделирование процессов гемодинамики — описание течения крови в замкнутой сердечно-сосудистой системе человека, т.е. на графе сердечно-сосудистой системы.

Представленные здесь результаты носят фрагментарный характер — математическая теория оптимального управления системами с распределенными параметрами на графе находится в стадии формирования.

Добавим также, что по содержанию материал настоящей книги почти не пересекается с материалами ранее вышедшей монографии [77] и представляет существенное ее развитие прежде всего в направлении

анализа вопросов существования и единственности обобщенных решений (слабых решений) краевых и начально-краевых задач. Та же часть, где используется материал указанных изданий (раздел I и частично II настоящей книги), служит базой для полученных в последнее время новых результатов (разделы II–IV настоящей книги).

Авторы выражают глубокую благодарность Ю.А. Гнилицкой, внесшей существенный вклад при написании раздела IV.

Авторы весьма признательны рецензентам рукописи книги за ряд очень ценных советов и замечаний.



On Il'in-Moiseev type solvability conditions for nonlocal vector boundary value problems // Differential Equations. 2008. Т. 44. № 3. С. 446-448.

[102] Provotorov V.V. Eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem on astar graph // Sbornik: Mathematics. 2008. Т. 199. № 10. С. 1523-1545.

[103] Sotnikova M., Zhabko N., Lepikhin T. Control System Analysis and Design Labs with Educational Plants // Proceedings of the 9th IFAC Symposium Advances in Control Education (ACE 2012). - Nizhny Novgorod, Russia, - 2012. -- P. 212-217.

[104] Zhabko N.A. Some H-optimization problems for ITER plasma control system // International Journal of Modern Physics A, 2009. - Vol. 24, - № 5. -- P. 1048-1056.

---

Научное издание

**Вячеслав Васильевич Провоторов  
Анна Сергеевна Волкова**

**НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ  
ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ**

Монография

Издание публикуется в авторской редакции

Дизайн обложки С.А.Кравец

---

Подписано в печать **05.01.2014**. Формат **60x84 1/16**.  
Усл. печ.л. **12,2**. Заказ **000**. Тираж **500** экз.

---

ООО Издательство «Научная книга»  
394077, Россия, г.Воронеж, ул. 60-й Армии, 25-120  
<http://www.sbook.ru/>

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в ООО «Цифровая полиграфия»  
394036, г. Воронеж, ул. Ф. Энгельса, 52.  
Тел.: (473)261-03-61